SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

ODJEL ZA FIZIKU

IVANA MILAT

MEHANIKA KONTINUUMA

Diplomski rad

Osijek, 2016.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

ODJEL ZA FIZIKU

IVANA MILAT

MEHANIKA KONTINUUMA

Diplomski rad

Predložen Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku radi stjecanja akademskog naziva MAGISTRA EDUKACIJE FIZIKE I INFORMATIKE

Osijek, 2016.

"Ovaj diplomski rad je izrađen u Osijeku pod vodstvom doc.dr.sc. Zvonka Glumca u sklopu Sveučilišnog diplomskog studija Fizike i informatike na Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku."

Sadržaj

1. **Uvod** ... 1
2. **Homogenost. Izotropnost. Gustoća mase.** ... 1
3. **Unutarnje sile. Vanjske sile.** ... 2
4. **Cauchyjev princip naprezanja. Vektor naprezanja.** ... 2
5. **Tenzor naprezanja** ... 4
6. **Fundamentalni zakoni mehanike kontinuuma** ... 7
   6.1. Očuvanje mase. Jednadžba kontinuiteta. ... 7
   6.2. Načelo linearnog momenta (količina gibanja). Jednadžbe gibanja. Jednadžbe ravnoteže. ... 11
   6.3. Načelo kutnog momenta (moment momenta ili moment količine gibanja) ... 15
   6.4. Očuvanje energije. Prvi zakon termodinamike. Jednadžba energije. ... 17
   6.5. Jednadžbe stanja. Entropija. Drugi zakon termodinamike. ... 21
   6.6. Clausius-Duhemova nejednakost. Funkcija rasipanja. ... 22
   6.7. Konstitutivne jednadžbe. Termomehanički i mehanički kontinuum. ... 25
7. **Zaključak** ... 27
8. **Literatura** ... 28

Životopis ... 29

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku   Diplomski rad

Odjel za fiziku

MEHANIKA KONTINUUMA

IVANA MILAT

Sažetak

U prvom dijelu diplomskog rada objašnjen je koncept kontinuuma te djelovanje unutarnjih i vanjskih sila. Objašnjen je Cauchyjev princip naprezanja te je uveden pojam tenzora naprezanja. Kroz rad su uvedeni i objašnjeni fundamentalni zakoni mehanike kontinuuma.

(28 stranica, 7 slika)

Rad je pohranjen u knjižnici Odjela za fiziku

Ključne riječi: mehanika kontinuuma/ očuvanje mase/ načelo linearnog momenta/ očuvanje energije/ funkcija rasipanja

Mentor: doc. dr. sc. Zvonko Glumac

Ocjenjivači: izv. prof. dr. sc. Ramir Ristić, predsjednik

doc. dr. sc. Zvonko Glumac, mentor

mr. sc. Slavko Petrinšak, član

Rad prihvaćen: 18.01.2016.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Department of Physics

Bachelor of Science Thesis

MEHANIKA KONTINUUMA

IVANA MILAT

Abstract

The continuum concept and interaction of body and surface forces are presented in the first part of this thesis. Concept of stress tensor is introduced and Cauchy's stress principle is explained further on. Fundamental laws of continuum mechanics are introduced and explained in the main part of this thesis.

(28 pages, 7 figures)

Thesis deposited in Department of Physics library

Keywords: mehanika kontinuuma/ očuvanje mase/ načelo linearnog momenta/ očuvanje energije/ funkcija rasipanja

Supervisor: doc. dr. sc. Zvonko Glumac

Reviewers: izv. prof. dr. sc. Ramir Ristić, predsjednik

doc. dr. sc. Zvonko Glumac, mentor

mr. sc. Slavko Petrinšak, član

Thesis accepted: 18.01.2016.

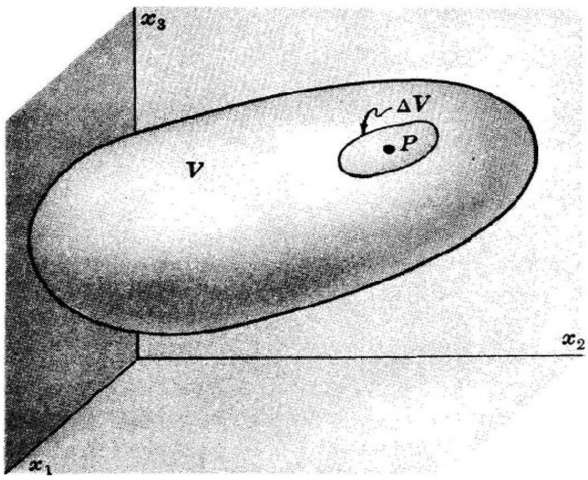
1. Uvod

Mehanika kontinuuma je grana mehanike posvećena proučavanju gibanja i ravnoteže plinova, tekućina i krutih tijela. Grane mehanike kontinuuma uključuju hidrodinamiku, dinamiku plinova, teoriju elastičnosti i teoriju plastičnosti. Glavna pretpostavka mehanike kontinuuma je da se materija može razmatrati kao kontinuirani medij bez obzira na njegovu molekularnu (atomsku) strukturu i da se raspodjela svih karakteristika medija (uključujući gustoću, naprezanja i brzine čestica) također smatra kontinuiranom. Ovo je opravdano ako zanemarimo dimenzije molekula u usporedbi s dimenzijama čestica koje su promatrane u teorijskim i eksperimentalnim proučavanjima u mehanici kontinuuma.

Slijede osnovne jednadžbe u proučavanju bilo kojeg medija u mehanici kontinuuma: jednadžbe gibanja i ravnoteže medija koje nastaju kao posljedica fundamentalnih zakona mehanike; jednadžba kontinuiteta medija, što je posljedica zakona o očuvanju mase; i jednadžba energije.

2. Homogenost. Izotropnost. Gustoća mase.

Homogeni materijal ima identična svojstva u svim točkama. Materijal je izotropan ako je to svojstvo isto u svim smjerovima. Materijal je anizotropan ako u različitim smjerovima ima drugačija svojstva. Koncept gustoće razvijen je iz omjera mase i volumena u susjedstvu točke u kontinuumu.



Slika 1. Koncept gustoće u okolini točke u kontinuumu

(Mase G.E., Schaum's Outline of Theory and Problems of Continuum Mechanics, New York, McGraw – Hill Book Company, 1970., str. 44)

Prosječna gustoća materijala unutar ΔV je

$$\rho_{(av)} = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Gustoća u nekoj unutrašnjoj točki P elementa volumena ΔV dana je matematički u skladu s konceptom kontinuuma u granicama

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

Gustoća mase ρ je skalar.

3. Unutarnje sile. Vanjske sile.

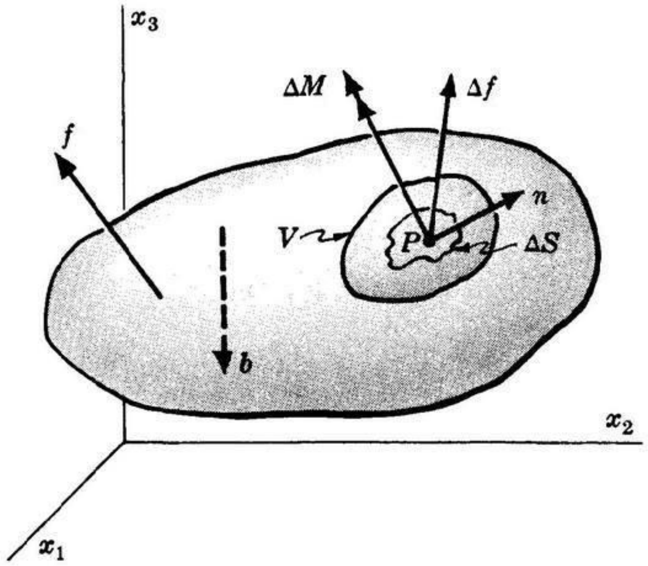
Sile su vektorske veličine. One sile koje djeluju na sve elemente volumena kontinuuma zovu se unutarnje sile (npr. gravitacijska i inercijska sila). Unutarnje sile označavamo simbolom $\boldsymbol{b}$ (sila po jedinici mase), ili kao $\boldsymbol{p}$ (sila po jedinici volumena).

Jednadžba $\rho b_i = p_i, za\ i = 1, 2, 3;\ ili\ \rho\boldsymbol{b} = \boldsymbol{p}$ povezuje unutarnje sile sa gustoćom.

One sile koje djeluju na površinu elementa, na dijelić granične površine kontinuuma ili na proizvoljnu unutarnju površinu, zovu se vanjske sile. Označavamo ih s $\boldsymbol{f}$ (sila po jedinici površine). Kontaktne sile između tijela su vrsta vanjskih sila.

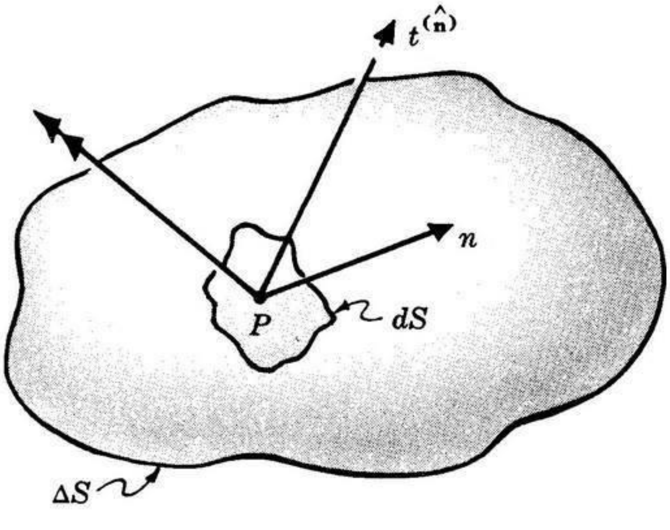
4. Cauchyjev princip naprezanja. Vektor naprezanja.

Kontinuirana materija koja zauzima područje R prostora, podvrgnuta je površinskim silama $\boldsymbol{f}$ i unutarnjim silama $\boldsymbol{b}$, što je prikazano na slici 2. Kao rezultat prenošenja sila od jednog dijelića kontinuuma do drugog, materija unutar proizvoljnog volumena V obuhvaćenog površinom S djeluje s materijom izvan tog volumena. Neka je $\boldsymbol{n}$ jedinični vektor normale u točki P (usmjeren prema van) malog elementa površine $\Delta S\ od\ S$. Neka je $\Delta\boldsymbol{f}$ rezultantno međudjelovanje između materije unutar volumena V i materije izvan volumena V na djeliću plohe ΔS koja omeđuje taj volumen. Element sile $\Delta\boldsymbol{f}$ ovisi o izboru ΔS i $\boldsymbol{n}$. Treba napomenuti da raspodjela sile na ΔS nije nužno jednolika. Raspodjela sila jednako utječe na silu i na moment u točki P, kao što je prikazano vektorima $\Delta\boldsymbol{f}$ i $\Delta\boldsymbol{M}$ na slici 2.



Slika 2. Materija podvrgnuta površinskim i unutarnjim silama

(Mase G.E., Schaum's Outline of Theory and Problems of Continuum Mechanics, New York, McGraw – Hill Book Company, 1970., str. 45)



Slika 3. Vektor naprezanja

(Mase G.E., Schaum's Outline of Theory and Problems of Continuum Mechanics, New York, McGraw – Hill Book Company, 1970., str. 45)

Prosječna sila po jedinici površine na ΔS dana je s $\Delta\boldsymbol{f}/\Delta S$. Cauchyjev princip naprezanja tvrdi da odnos $\Delta\boldsymbol{f}/\Delta S$ teži u konačan limes $d\boldsymbol{f}/dS$ kako se ΔS približava nuli u točki P, dok istovremeno moment sile $\Delta\boldsymbol{f}$ oko točke P nestaje u toj granici *(limiting process).* Rezultantni vektor $d\boldsymbol{f}/dS$ (sila po jedinici površine) zove se vektor naprezanja $t^{(\hat{n})}$ i prikazan je na slici 3. Ako moment sile u točki P ne nestane u opisanom graničnom procesu *(limiting process),* definira se par vektora naprezanja prikazan dvostrukom strelicom na slici 3.

Matematički, vektor naprezanja je definiran s

$$t_i^{(\hat{n})} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta f_i}{\Delta S} = \frac{df_i}{dS} \quad ili \quad \boldsymbol{t}^{(\widehat{\boldsymbol{n}})} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{d\boldsymbol{f}}{dS} = \frac{d\boldsymbol{f}}{dS}$$

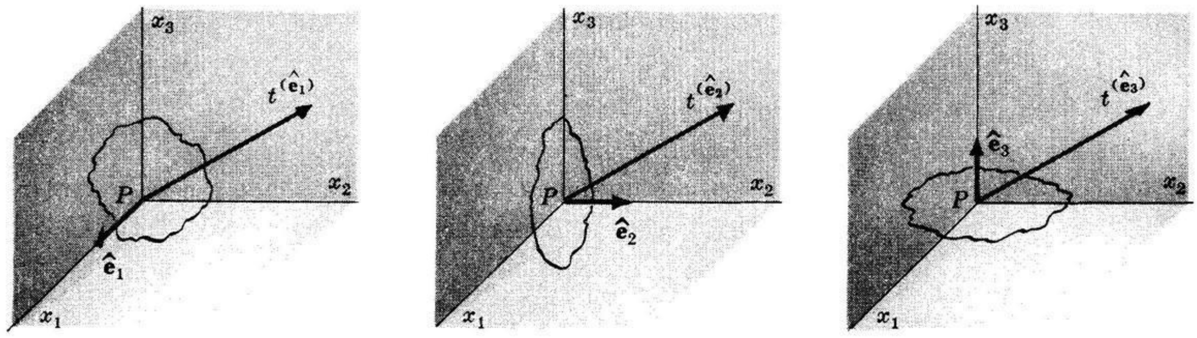
Notacija $\boldsymbol{t}^{(\hat{\boldsymbol{n}})}$ koristi se za isticanje činjenice da vektor naprezanja u danoj točki P u kontinuumu ovisi isključivo o određenom elementu površine ΔS, kao što je prikazano jediničnim vektorom normale $\boldsymbol{n}$ $(\widehat{\boldsymbol{n}})$. Za neke različito orjentirane elemente površine, s različito usmjerenim vektorom normale, pridruženi vektor naprezanja u točki P će također biti različit. Vektor naprezanja koji proizlazi iz djelovanja duž ΔS u točki P materije unutar V, nad materijom izvan, je vektor $-\boldsymbol{t}^{(\hat{\boldsymbol{n}})}$. Po Newtonovom aksiomu akcije i reakcije slijedi

$$-t_i^{(\hat{n})} = t_i^{(-\hat{n})} \quad ili \quad -\boldsymbol{t}^{(\hat{\boldsymbol{n}})} = \boldsymbol{t}^{(\hat{\boldsymbol{n}})}.$$

5. Tenzor naprezanja

U nekoj proizvoljnoj točki P kontinuuma, Cauchyjevo načelo naprezanja pridružuje vektor naprezanja $\boldsymbol{t}^{(\widehat{\boldsymbol{n}})}$ svakom jediničnom vektoru normale $\boldsymbol{n}$, koji predstavlja smjer infinitezimalno male površine unutar koje se nalazi točka P. Ovo je prikazano na slici 3. Ukupnost svih mogućih parova takvih vektora $\boldsymbol{t}^{(\widehat{\boldsymbol{n}})}$ i $\hat{\boldsymbol{n}}$ u P definira stanje naprezanja u toj točki. Nije potrebno naznačiti svaki par normalnog i vektora naprezanja da bi u potpunosti opisali stanje naprezanja u danoj točki. To se može postići dajući vektor naprezanja na svaku od tri međusobno okomite ravnine u točki P. Jednadžbe preobrazbe koordinata tada služe za povezivanje vektora naprezanja bilo koje druge ravnine s dane tri ravnine.

Usvajanjem ravnina okomitih na koordinatne osi za potrebe određivanja stanja naprezanja u točki, pripadajući vektori naprezanja i normalni vektori su prikazani na slici 4.



Slika 4. Grafički prikaz vektora naprezanja i vektora normale

(Mase G.E., Schaum's Outline of Theory and Problems of Continuum

Mechanics, New York, McGraw – Hill Book Company, 1970., str. 46)

Tri odvojena grafička prikaza na slici 4. često se spajaju u jedan shematski prikaz kao što prikazuje slika 5.

Vektori naprezanja svih triju koordinatnih ravnina mogu biti zapisani, u suglasnosti s

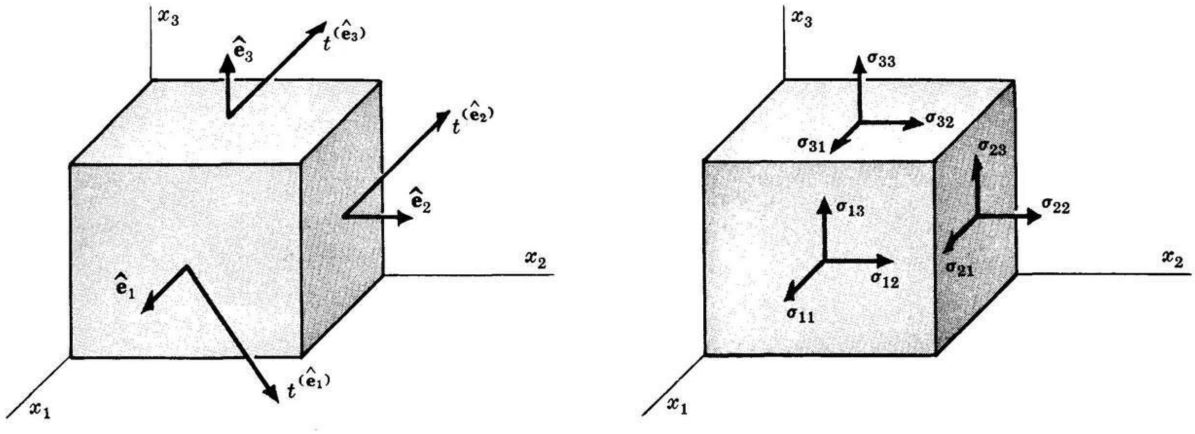
$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{3} v_j \hat{\boldsymbol{e}}_j,$$

u terminu njihovih Kartezijevih komponenata kao

$$\boldsymbol{t}^{\widehat{e1}} = t_1^{(\widehat{e_1})} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} + t_2^{(\widehat{e_1})} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}} + t_3^{(\widehat{e_1})} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{3}} = \sum_{j=1}^{3} t_j^{(\widehat{e_1})} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}}$$

$$\boldsymbol{t}^{\widehat{e2}} = t_1^{(\widehat{e_2})} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} + t_2^{(\widehat{e_2})} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}} + t_3^{(\widehat{e_2})} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{3}} = \sum_{j=1}^{3} t_j^{(\widehat{e_2})} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}}$$

$$\boldsymbol{t}^{\widehat{e3}} = t_1^{(\widehat{e_3})} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} + t_2^{(\widehat{e_3})} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}} + t_3^{(\widehat{e_3})} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{3}} = \sum_{j=1}^{3} t_j^{(\widehat{e_3})} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}}$$



Slika 5. Shematski prikaz vektora naprezanja

(Mase G.E., Schaum's Outline of Theory and Problems of Continuum

Mechanics, New York, McGraw – Hill Book Company, 1970., str. 47)

Devet komponenata tri vektora naprezanja

$$t_j^{(\widehat{e_i})} \equiv \sigma_{ij}$$

su komponente Kartezijevog tenzora drugog reda znanog kao tenzor naprezanja (stress tenzor).

Matrični prikaz tenzora naprezanja

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Prethodni zapis možemo izraziti u obliku tenzora drugog reda

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

6. Fundamentalni zakoni mehanike kontinuuma

6.1. Očuvanje mase. Jednadžba kontinuiteta.

Svojstvo poznato kao masa povezano je s kontinuumom svake materije. Količina mase u dijelu kontinuuma koje ispunjava prostorni volumen V za vrijeme t dana je integralom

$$m = \int_V \rho\,(\boldsymbol{x}, t) dV \tag{1}$$

u kojem je $\rho\,(\boldsymbol{x}, t)$ kontinuirana funkcija koordinata zvane gustoća mase. Zakon očuvanja mase zahtijeva da masa specifičnog dijela kontinuuma ostane konstantna.

Brzina promjene *(material derivative)* m u (1) biti će nula.

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho\,(\boldsymbol{x}, t)\, dV = \int_V \frac{d}{dt}[\rho(\boldsymbol{x}, t)\, dV] =$$

$$= \int_V \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\frac{d}{dt}\right] dV = \int_V \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right] dV =$$

$$= \int_V \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right] dV = 0$$

$$\frac{dm}{dt} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{d\rho}{\partial t} + \rho\,\frac{\partial v_k}{\partial x_k} => \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$$

S obzirom da ova jednadžba volumen V smatra proizvoljnim, integrand mora nestati. Derivacija funkcije v_k po k-toj komponenti može biti zapisana u suglasnosti s

$$v_{k,k} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = div\, \boldsymbol{v}.$$

$$\frac{d\rho}{\partial t} + \rho v_{k,k} = 0 \quad ili \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho\,(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) = 0 \tag{3}$$

Ova jednadžba zove se jednadžba kontinuiteta; koristeći operator materijalne derivacije može se staviti u alternativni oblik.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \quad ili \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \qquad (4)$$

Za nestlačivi kontinuum masena gustoća svake čestice je neovisna o vremenu, tako da $d\rho/dt = 0$ i (3) daju rezultat

$$v_{k,k} = 0 \quad ili \quad div\, \boldsymbol{v} = 0 \qquad (5)$$

Polje brzine $\boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{x}, t)$ nestlačivog kontinuuma može se izraziti jednadžbom

$$v_i = \epsilon_{ijk}\, s_{k,j} \quad ili \quad \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{s} \qquad (6)$$

u kojoj je $\boldsymbol{s}\,(\boldsymbol{x}, t)$ nazvan vektorskim potencijalom od $\boldsymbol{v}$.

Do prethodnog izraza došli smo koristeći vektorski produkt u koordinatnom sustavu;

$$\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ s_x & s_y & s_z \end{vmatrix} = i\left(\frac{\partial s_z}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial z}\right) - j\left(\frac{\partial s_z}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial z}\right) + k\left(\frac{\partial s_y}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial y}\right)$$

$$v_x = \frac{\partial s_z}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial z}$$

$$v_x = \epsilon_{xyz}\, s_{z,y}$$

Prethodni izraz možemo zapisati kao

$$v_i = \epsilon_{ijk}\, s_{k,j}$$

Divergencija od s_j može biti napisana u suglasnosti s:

$$s_{k,j} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial s_k}{\partial x_j}.$$

Simbol ϵ_{ijk} naziva se Levi Civita simbol ili permutacijski simbol. Može poprimiti vrijednosti -1, 0 i 1. Slijedi da je

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} -1, ako\ su\ i, j, k\ neparne\ permutacije\ od\ 1, 2, 3 \\ 0, za\ dva\ ili\ tri\ jednaka\ indeksa \\ 1, ako\ su\ i, j, k\ parne\ permutacije\ od\ 1, 2, 3 \end{cases}$$

Ako indekse 1, 2 i 3 uzimamo u pozitivnom smjeru (smjer obrnut smjeru kazaljke na satu), Levi Civita simbol će poprimiti pozitivnu vrijednost (+1). Ukoliko indekse uzimamo u negativnom smjeru (smjer jednak smjeru kazaljke na satu), Levi Civita simbol će poprimiti negativnu vrijednost (-1).

Očuvanje mase zahtijeva da je

$$\int_{V_0} \rho_0\ (\boldsymbol{X},0)\, dV_0 = \int_V \rho\ (\boldsymbol{x},t\,) dV \tag{7}$$

gdje su integrirane iste čestice, tj. V je sada volumen okupiran materijom koja je ispunila V_0 pri vremenu t = 0. Koristimo $x_i = x_i\,(X_1, X_2, X_3, t\,) = x_i\,(\boldsymbol{X}, t\,) \quad ili \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{X}, t\,)$ i

$dV = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial X_1} \frac{\partial x_j}{\partial X_2} \frac{\partial x_k}{\partial X_3} dX_1 dX_2 dX_3 = J dV_0$, gdje je $J = \left|\partial x_i / \partial X_j\right| Jakobijan,$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial X_1} & \frac{\partial x_i}{\partial X_2} & \frac{\partial x_i}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_j}{\partial X_1} & \frac{\partial x_j}{\partial X_2} & \frac{\partial x_j}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_k}{\partial X_1} & \frac{\partial x_k}{\partial X_2} & \frac{\partial x_k}{\partial X_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial x_j}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial x_k}{\partial X_3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial x_i}{\partial X_1} \cdot \left(\frac{\partial x_j}{\partial X_2} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial X_3} - 0 \cdot 0\right) - 0 \cdot \left(0 \cdot \frac{\partial x_k}{\partial X_3} - 0 \cdot 0\right) + 0 \cdot \left(0 \cdot 0 - 0 \cdot \frac{\partial x_j}{\partial X_2}\right)$$

$$J = \frac{\partial x_i}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial X_2} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial X_3}$$

$$dV_0 = dX_1 dX_2 dX_3\,.$$

Desna strana integrala u (7) se može preoblikovati

$$\int_{V_0} \rho_0\ (\boldsymbol{X}, 0\,) dV_0 = \int_{V_0} \rho\ (\boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{X}, t\,) J\, dV_0 = \int_{V_0} \rho\ (\boldsymbol{X}, t\,) J\, dV_0 \tag{8}$$

S obzirom da ova relacija mora vrijediti za bilo koji volumen V_0 slijedi

$$\rho_0 = \rho J \tag{9}$$

što podrazumjeva nezavisnost produkta ρJ o vremenu jer je V proizvoljan, ili da

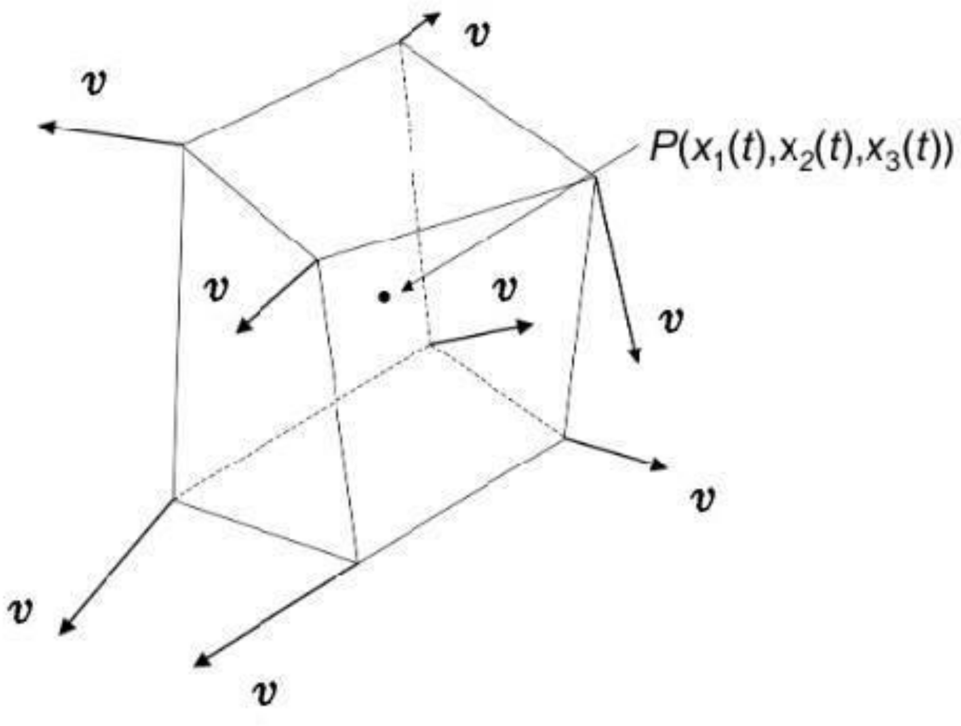
$$\frac{d}{dt}\,(\rho J) = 0 \tag{10}$$

Jednadžba (10) je Lagranžev diferencijalni oblik jednadžbe kontinuiteta.

Očuvanje mase, načelo koje kaže da se masa objekta ili skupa objekata nikada ne mijenja, bez obzira na način na koji se sastavni dijelovi rearanžiraju. U fizici, masa je promatrana na dva sukladna načina. S jedne strane, promatrana je kao mjera inercije tj. svojstvo tijela da se opire promjeni stanja gibanja u kojem se nalazi. S druge strane, masa je promatrana kao izvor sile gravitacije. Dakle, sa gledišta i inercijske i gravitacijske mase sukladno načelu očuvanja mase, mjerenja mase istog objekta pod različitim okolnostima uvijek bi trebala dati isti rezultat.

Načelo očuvanja mase navodi da je za bilo koji sustav zatvoren za sve prijenose tvari i energije (od kojih oboje ima masu), masa sustava mora ostati konstantna tijekom vremena, bez obzira na procese koji se odvijaju unutar sustava. Dakle, količina mase je očuvana tijekom vremena. Načelo implicira da masa ne može biti stvorena ili uništena iako može biti rearanžirana u prostoru. Načelo zahtijeva da tijekom bilo koje kemijske reakcije, nuklearne reakcije ili radioaktivnog raspada u izoliranom sustavu, ukupna masa reaktanta ili početne materije mora biti jednaka masi produkta.

Jednadžba kontinuiteta je izraz temeljnog načela očuvanja, tj. očuvanja mase. Na slici 6 opisujemo očuvanje mase. Element volumena dV kreće se s fluidom kako je skicirano.



Slika 6. Očuvanje mase

(https://www.physics.wisc.edu/grads/courses/726-f07/files/Section_3_Cont_02.pdf)

Preuzeto: (16.08.2015.)

Svaka točka P na površini i unutar volumena giba se lokalnom brzinom $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{x}/dt$. Koordinate svakog djelića elementa volumena ovisni su o vremenu: $x_i = x_i\,(t)$. Oblik elementa volumena može se deformirati s vremenom. S obzirom da se svaka točka na granici S giba s fluidom, niti jedan fluid ne može se gibati kroz površinu, tako da je ukupna masa unutar elementa volumena konstantna u vremenu: $dm/dt \ = \ 0$ i masa je automatski očuvana.

6.2. Načelo linearnog momenta (količina gibanja). Jednadžbe gibanja. Jednadžbe ravnoteže.

Moment je mjera tendencije tijela da zadrži stanje gibanja. Linearni moment $\boldsymbol{P}$ je definiran kao produkt mase tijela i brzine, $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}$. Brzina promjene $\dot{\boldsymbol{P}}$ je

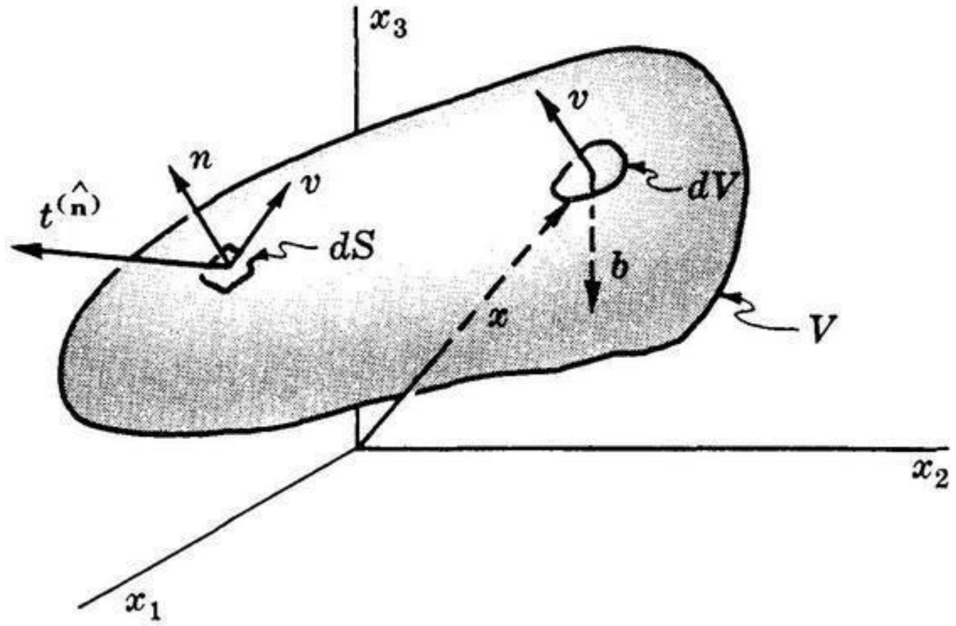
$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \frac{d\,(m\boldsymbol{v}\,)}{dt} = m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\boldsymbol{a}$$

I korištena je činjenica da je $dm/dt = 0$. Stoga, drugi Newtonov aksiom, $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, može biti zapisan kao

$$\boldsymbol{F} = \frac{d}{dt}\,(\,m\boldsymbol{v}\,)$$

Ova jednadžba tvrdi da je brzina promjene lineranog momenta jednaka primjenjenoj sili i nazivamo ju načelo linearnog momenta. Ukoliko ne postoji sila koja djeluje na sustav, ukupni moment sustava ostaje konstantan; u ovom slučaju zakon je poznat kao načelo sačuvanja linearnog momenta.

Gibajući kontinuum koji ispunjava volumen V u vremenu t prikazan je na slici 7.



Slika 7. Gibajući kontinuum

(Mase G.E., Schaum's Outline of Theory and Problems of Continuum Mechanics, New York, McGraw – Hill Book Company, 1970., str. 127)

Dana je unutarnja sila $\boldsymbol{b}$ koja djeluje na tijelo po jedinici mase. Na diferencijalnom elementu dS granične površine, vektor naprezanja je $\boldsymbol{t}^{(\hat{\boldsymbol{n}})}$. Kroz prostor ispunjen kontinuumom zadano je polje brzine $v_i = du_i/dt$, gdje u_i predstavlja komponente pomaka. Za ovaj slučaj, ukupni linearni moment masenog sustava unutar V je dan s

$$P_i\,(\,t\,) = \int_V \rho v_i\, dV \tag{11}$$

Na temelju drugog Newtonovog aksioma, princip linearnog momenta kazuje da je promjena brzine u jedinici vremena jednaka rezultantnoj sili koja djeluje na promatrani dio. Načelo momenta za ovaj maseni sustav izražen je s

$$\int_s t_i^{(\widehat{n})}\, dS + \int_V \rho b_i dV = \frac{d}{dt}\int_V \rho v_i dV$$

ili

$$\int_S \boldsymbol{t}^{(\widehat{\boldsymbol{n}})} dS + \int_V \rho \boldsymbol{b}\, dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \boldsymbol{v}\, dV \tag{12}$$

Do izraza (12) može se doći zbrajanjem unutarnje i vanjske sile koje djeluju na promatrani dio.

$$\boldsymbol{P} = \int_V \rho \boldsymbol{v}\, dV$$

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}$$

$$m = \int \rho \;\, dV$$

$$b = \frac{F}{m} \cdot m$$

$$\boldsymbol{b}m = \boldsymbol{F_u}$$

$$\boldsymbol{F_u} = \int \rho \boldsymbol{b}\, dV$$

$$\boldsymbol{F_v} = \int \boldsymbol{P}\, dV$$

$$P_i = \nabla \cdot t_i^{(\hat{n})}$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_u} + \boldsymbol{F_v} = \int \rho b_i\, dV + \int P_i\, dV = \int_V \rho b_i\, dV + \int \boldsymbol{\nabla}\, \boldsymbol{t}^{(\hat{\boldsymbol{n}})}\, dV$$

$$= \int_V \left(\nabla\, t_i^{(\hat{n})} + \rho b_i\right) dV$$

Zamjenom $t_i^{(\widehat{n})} = \sum_j \sigma_{ji} n_j$ u prvi integral kod (12) i pretvaranjem rezultirajućeg površinskog integrala po Gaussovom teoremu divergencije (12) postaje

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + \rho b_i)\, dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i\, dV$$

ili

$$\int_V (\nabla_x \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \rho \boldsymbol{b})\, dV = \frac{d}{dt} \int \rho \boldsymbol{v} dV. \tag{13}$$

Gaussov teorem divergencije povezuje volumni i površinski integral. U toj uobičajenoj formi teorem kaže da je vektorsko polje $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$,

$$\int_V div\, \boldsymbol{v}\, dV = \int_S \hat{\boldsymbol{n}}\, \boldsymbol{v}\, dS,$$

gdje je $\hat{\boldsymbol{n}}$ vektor normale okomit na površinu. Po komponentama zapisujemo u obliku

$$\int_V v_{i,i}\ dV = \int_S v_i n_i\, dS\,.$$

Teorem divergencije, izražen predhodnom formulom, može se poopćiti tako da poveže tenzorsko polje s bilo kojim drugim poljem. Dakle, za proizvoljno tenzorsko polje T_{ijk}, teorem glasi

$$\int_V T_{ijk,p}\, dV = \int_S T_{ijk} n_p\ dS\,.$$

Divergencija od $\boldsymbol{t_j}$ može biti napisana u suglasnosti s :

$$\sigma_{ji,j} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial t_{ji}}{\partial x_j}$$

Računajući derivaciju *(material derivative)* u (13), može se koristiti jednadžba kontinuiteta u obliku danom u (10). Slijedi

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho v_i\, dV = \frac{d}{dt}\int_{V_0} \rho v_i\, J dV_0 = \int_{V_0} \left[\rho J\, \frac{dv_i}{dt} + \frac{d}{dt}\,(\rho J)\right] dV_0 = \int_{V_0} \rho J \frac{dv_i}{dt}\, dV_0$$
$$= \int \rho\, \frac{dv_i}{dt}\, dV \qquad (14)$$

Slijedi

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \boldsymbol{v}\, dV = \int_V \rho\, \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\, dV$$

Zamjenom desne strane izraza (13) s desnom stranom izraza (14) i pojednostavljivanjem novo nastalog izraza, rezultira principom linearnog momenta u integralnom obliku:

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + \rho b_i - \rho \dot{v}_i)\, dV = 0$$

ili

$$\int_V (\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \rho b - \rho \dot{\boldsymbol{v}})\, dV = 0 \tag{15}$$

$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}$ predstavlja divergenciju tenzora po jednoj komponenti.

Budući da je volumen V proizvoljan, intengrand od (15) mora nestati. Konačne jednadžbe,

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i$$

ili

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \rho \boldsymbol{b} = \rho \dot{\boldsymbol{v}} \tag{16}$$

poznate su kao jednadžbe gibanja.

Važan slučaj statičke ravnoteže, u kojem komponente ubrzanja nestaju, dan je iz (16) kao

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0$$

ili

$$\nabla_x \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \rho \boldsymbol{b} = 0 \tag{17}$$

Ove jednadžbe nazivamo jednadžbe ravnoteže.

6.3. Načelo kutnog momenta (moment momenta ili moment količine gibanja)

Moment momenta je, kao što ime implicira, moment linearnog momenta u odnosu na neku točku. Za kontinuum na slici 7 ukupni moment momenta, ili kutnog momenta u odnosu na ishodište je

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{P} = \boldsymbol{x} \times m\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}$$

$$m = \int \rho\, dV$$

$$\boldsymbol{N} = \int \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v} \cdot \rho\, dV$$

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\,(yv_z - zv_y) - \boldsymbol{j}\,(xv_z - zv_x) + \boldsymbol{k}\,(xv_y - yv_x)$$

$$N_i = \int_V \left(v_z y - v_y z\right) \rho \, dV = \int_V \epsilon_{ijk} x_j v_k \rho \, dV \tag{18}$$

gdje je x_j vektor položaja elementa volumena dV. Načelo momenta momenta tvrdi da je zakretni moment (moment sile) kutnog momenta bilo kojeg dijela kontinuuma u odnosu na proizvoljnu točku jednak rezultantnom momentu (u odnosu na tu točku) tijela i vanjskih sila koje djeluju na na promatrani dio kontinuuma.

Moment sile jednak je: $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{N}}{dt} \Rightarrow \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{N}}{dt}$$

Načelo kutnog momenta za kontinuum na slici 7 izraženo je u integralnom obliku

$$\int_V \rho \, \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b} \, dV + \int_S \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t}^{(\hat{\boldsymbol{n}})} \, dS = \frac{d}{dt} \int_V \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v} \, \rho \, dV$$

ili

$$\int_V \epsilon_{ijk} x_j b_k \rho \, dV + \int_S \epsilon_{ijk} \, x_j t_k^{(\hat{n})} dS = \frac{d}{dt} \int_V \epsilon_{ijk} \, x_j v_k \rho \, dV \tag{19}$$

Jednadžba (19) valjana je za one kontinuume u kojima su sile između čestica jednake po iznosu, suprotne po smjeru i kolinearne, i u kojima su distribuirani momenti odsutni. Načelo kutnog momenta ne daje niti jednu novu diferencijalnu jednadžbu gibanja. Ukoliko izvršimo zamjenu $t_k^{(\widehat{n})} = \sum_p \sigma_{pk} n_p$ u (19), i preptostavimo simetriju tenzora naprezanja, jednadžba je također zadovoljena koristeći relaciju danu u (16). Ukoliko ne pretpostavimo simetričnost opterećenja, takva simetričnost može slijediti izravno iz (19).

$$\int_S \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{jk} n_j \, dS + \int_V \epsilon_{ijk} \, x_j \rho b_k \, dV = \frac{d}{dt} \int_V \epsilon_{ijk} \, x_j v_k \rho \, dV$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{jk}\right) dV + \int_V \epsilon_{ijk} \, x_j \rho b_k \, dV = \frac{d}{dt} \int_V \epsilon_{ijk} \, x_j v_k \rho \, dV$$

$$\int_V \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} \, dV + \int_V \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_j} \, dV + \int_V \epsilon_{ijk} x_j \rho b_k \, dV = \frac{d}{dt} \int_V \epsilon_{ijk} \, x_j v_k \rho \, dV$$

$$\int_V \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} \, dV + \int_V \epsilon_{ijk} x_j \left(\sigma_{jk,j} + \rho b_k\right) dV = \frac{d}{dt} \int_V \epsilon_{ijk} \, x_j v_k \rho \, dV$$

Nakon supstitucije $t_k^{(\widehat{n})} = \sum_p \sigma_{pk} n_p$ (19) se svodi na

$$\int_V \epsilon_{ijk}\, \sigma_{jk}\, dV = 0$$

ili

$$\int_V \boldsymbol{\Sigma_v} dV = 0 \tag{20}$$

$\boldsymbol{\Sigma_v}$ predstavlja rzliku između tenzora i njegovog simetričnog tenzora.

S obzirom da je volumen V proizvoljan,

$$\epsilon_{ijk}\sigma_{jk} = 0$$

ili

$$\sigma_{jk} - \sigma_{kj} = 0$$

$$\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$$

$$\int_V \left(\sigma_{jk} - \sigma_{kj}\right) dV = \int_V (\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}')\, dV = \int_V \boldsymbol{\Sigma}_V \; dV$$

$$\boldsymbol{\Sigma_v} = 0 \tag{21}$$

Ako je vanjska sila koja djeluje na sustav jednaka nuli, tada je kutni moment sustava konstantan. Za bilo koju promjenu stanja sustava, promjena kutnog momenta je nula.

6.4. Očuvanje energije. Prvi zakon termodinamike. Jednadžba energije.

Ukoliko razmatramo samo mehaničke veličine, načelo očuvanja energije za kontinuum sa slike (7) može proizaći izravno iz jednadžbe gibanja (16). Da bi ovo postigli, računa se skalarni produkt između (16) i brzine v_i, a rezultat se integrira po volumenu *V*.

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i \,/\cdot\, v_i$$

$$v_i \sigma_{ij,j} + \rho b_i\, v_i = \rho \dot{v}_i v_i$$

Slijedi

$$\int_V \rho v_i \, \dot{v}_i \, dV = \int_V v_i \, \sigma_{ji,j} dV + \int_V \rho v_i b_i \, dV \tag{22}$$

ali

$$\int_V \rho v_i \, \dot{v}_i \, dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{v_i v_i}{2} \, dV = \frac{d}{dt} \int_V \frac{\rho {v_i}^2}{2} \, dV = \frac{dK}{dt} \tag{23}$$

predstavlja vremenski tok promijene kinetičke energije u kontinuumu. Također

$v_i \sigma_{ji,j} = \left(v_i \sigma_{ji}\right)_{,j} - v_{i,j} \, \sigma_{ji}$ *

i po $Y_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = D_{ij} + V_{ij}$, gdje je Y_{ij} tenzor gradijenta brzine, D_{ij} tenzor deformacije, a V_{ij} označava tenzor vrtložnosti.

Slijedi

$$v_{ij} \sigma_{ji} = \sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sigma_{ji} \left(D_{ij} + V_{ij}\right) = \sigma_{ji} D_{ij} + \sigma_{ji} V_{ij}$$

Iz (*) slijedi $v_i \sigma_{ji,j} = \left(v_i \sigma_{ji}\right)_j - \sigma_{ji} D_{ij}$ (**); $\sigma_{ji} V_{ij} = 0$

Prema tome, (22) možemo zapisati kao

$$\frac{dK}{dt} + \int_V D_{ij} \, \sigma_{ji} \, dV = \int_S \left(v_i \sigma_{ji}\right)_{,j} \, dV + \int_V \rho v_i \, b_i \, dV \tag{24}$$

s obzirom da je $V_{ij} \sigma_{ji} = 0$.

Konačno, pretvorbom prvog integrala desne strane (24) u površinski integral po Gaussovom teoremu divergencije i koristeći relaciju $t_i^{\widehat{(n)}} = \sigma_{ji} n_j$, jednadžba energije kontinuuma pojavljuje se u obliku

$$\frac{dK}{dt} + \int_V D_{ij} \sigma_{ji} \, dV = \int_S v_i t_i^{\widehat{(n)}} dS + \int_V \rho b_i v_i \, dV \tag{25}$$

Ova jednadžba povezuje vremenski tok promjene ukupne mehaničke energije kontinuuma na lijevoj strani s količinom rada vanjskih i unutrašnjih sila s desne strane jednadžbe.

Integral s desne strane jednak je količini rada unutrašnjih i vanjskih sila, i iz toga slijedi da je

$$\int \boldsymbol{vf} \, dV = \int d\boldsymbol{p} \, dV = \int \frac{dw}{dt} \, dV = \frac{d}{dt} \int w \, dV = \frac{dW}{dt}.$$

Integral s lijeve strane poznat je kao vremenski tok promjene unutarnje mehaničke energije.

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla}_x + \boldsymbol{\nabla}_x\boldsymbol{v}\right)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla}_x + \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\nabla}_x\boldsymbol{v}\right) = \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla}_x = \boldsymbol{\nabla}_x\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}_U\,\boldsymbol{v}$$

$$\int \boldsymbol{f}_U\boldsymbol{v}\,dV = \frac{dU}{dt}$$

Zapisan je kao dU/dt. Dakle (25) možemo ukratko zapisati kao

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{đW}{dt} \tag{26}$$

gdje $đW/dt$ predstavlja količinu rada, a posebni simbol đ koristi se da bi naznačili da ova količina nije egzaktan diferencijal.

Ukoliko uzmemo u obzir mehaničke i ne mehaničke energije, moramo koristiti najopćenitiji oblik načela o očuvanju energije. U ovom obliku načelo očuvanja tvrdi da je vremenski tok promjene kinetičke i unutarnje energije jednak zbroju količine rada i svih drugih energija dodanih ili oduzetih kontinuumu po jedinici vremena. Dodane energije mogu uključivati toplinsku, kemijsku ili elektromagnetsku energiju. U nastavku, u obzir uzimamo samo mehaničke i toplinske energije i tada načelo energije dobiva oblik dobro poznatog prvog zakona termodinamike.

Za termomehanički kontinuum uobičajeno je izraziti vrijeme toka promjene unutarnje energije integralnim izrazom

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho u dV = \int_V \rho\dot{u}\,dV \tag{27}$$

gdje se u naziva specifičnom unutarnjom energijom. Vektor $\boldsymbol{c}$ definiran je kao tok topline konvekcijom po jedinici površine po jedinici vremena, a z je konstanta zračenja topline po jedinici mase u jedinici vremena.

$$z = \frac{dQ'}{dt\,m}$$

$$\int z\rho\,dV = \frac{dQ'}{dt}$$

${dQ'}/{dt}$ označava brzinu izračene topline (zračenje).

$$\boldsymbol{c} = \frac{dQ}{dt\, S}\, \boldsymbol{n}$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\int \boldsymbol{c}\, dS$$

Brzina rasta ukupne topline u kontinuumu dana s

$$\frac{đQ}{dt} = -\int_S c_i n_i dS + \int_V \rho z dV \tag{28}$$

Prema tome, načelo energije za termomehanički kontinuum dano je s

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{đW}{dt} + \frac{đQ}{dt} \tag{29}$$

Ili u terminima energijskih integrala kao što su

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \frac{v_i v_i}{2}\, dV + \int_V \rho \dot{u}\, dV =$$

$$= \int_S t_i^{(\widehat{n})} v_i dS + \int_V \rho v_i\, b_i dV + \int_V \rho z dV - \int_S c_i n_i dS \tag{30}$$

Pretvaranje površinskih integrala u (30) u volumne integrale Gaussovim teoremom divergencije, koristeći činjenicu da je V proizvoljan, vodi do lokalnog oblika jednadžbe energije

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \frac{v_i^2}{2}\, dV + \frac{d}{dt}\int_V \rho u\, dV$$

$$= \int_V \left(\sigma_{ji} v_i\right)_j dV + \int_V \rho b_i v_i\, dV + \int_V z\rho\, dV - \int_V c_{i,i}\, dV$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \left(\rho \frac{v_i^2}{2} + \rho u\right) dV = \int_V \left[\left(\sigma_{ji} v_i\right)_j + \rho b_i v_i + z\rho - c_{i,i}\right] dV$$

$$\frac{d}{dt}\left(\rho \frac{v_i^2}{2} + \rho u\right) = \left(\sigma_{ji} v_i\right)_j + \rho b_i v_i + z\rho - c_{i,i}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + u\right) = \frac{1}{\rho}\left(\sigma_{ji} v_i\right)_{,j} + b_i v_i - \frac{1}{\rho} c_{i,i} + z \tag{31}$$

Unutar proizvoljno malog elementa volumena za kojeg vrijedi lokalna jednadžba energije (31), mora vrijediti i ravnoteža momenta dana u (16). Prema tome, uzimajući skalarni produkt između (16) i brzine $\rho \dot{v}_i v_i = v_i \sigma_{ji,j} + \rho v_i b_i$ i nakon nekoliko jednostavnih manipulacija,

$$\rho v_i \dot{v}_i + \rho \frac{du}{dt} = \sigma_{ji,j} v_i + \sigma_{ji} v_{i,j} + \rho b_i v_i + z\rho - c_{i,i}$$

$$\rho b_i v_i + v_i \sigma_{ji,j} + \rho \frac{du}{dt} = \sigma_{ji,j} v_i + \sigma_{ji} v_{i,j} + \rho b_i v_i + z\rho - c_{i,i}$$

$$\rho \frac{du}{dt} = \sigma_{ji} v_{i,j} + z\rho - c_{i,i}$$

I uvrstavanjem (**) u prethodni izraz dolazimo do smanjenog ali jako korisnog oblika lokalne jednadžbe energije

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ji} D_{ij} - \frac{1}{\rho} c_{i,i} + z \tag{32}$$

Ova jednadžba izražava brzinu promjene unutarnje energije kao zbroj snage naprezanja i topline dodane kontinuumu.

6.5. Jednadžbe stanja. Entropija. Drugi zakon termodinamike.

Kaže se da potpuna karakterizacija termodinamičkog sustava (u našem slučaju kontinuum) opisuje stanje sustava. Ovaj opis određen je pomoću nekoliko termodinamičkih i kinematičkih veličina zvanih varijable stanja. Vremenska promjena varijable stanja karakterizira termodinamički proces. Varijable stanja korištene za opis danog sustava obično nisu sve nezavisne. Funkcionalni odnosi postoje među varijablama stanja i ti odnosi izražavaju se tzv. jednadžbama stanja. Bilo koja varijabla stanja koja se može izraziti kao jednoznačna funkcija iz grupe drugih varijabli stanja znana je kao funkcija stanja.

Temeljno načelo prvog zakona termodinamike je međusobna pretvorba mehaničke i toplinske energije. Odnos koji izražava pretvorbu topline i rada u kinetičku i unutarnju energiju tijekom termodinamičkog procesa naveden je u jednadžbi energije. Međutim, prvi zakon ne daje odgovor na pitanje do koje mjere je proces pretvorbe povratan ili nepovratan. Osnovni kriterij nepovratnosti dan je drugim zakonom termodinamike kroz tvrdnju o ograničenosti stvaranja entropije.

Drugi zakon termodinamike nalaže postojanje dvaju različitih funkcija stanja; apsolutna temperatura T i entropija S sa slijedećim određenim svojstvima. T je pozitivna veličina koja je funkcija empirijske temperature θ. Entropija je ekstenzivna veličina, tj. ukupna entropija sustava je zbroj pojedinih entropija podsustava. U mehanici kontinuuma specifična entropija (po jedinici mase), ili gustoća entropije označena je simbolom s, tako da je ukupna entropija L dana izrazom $L = \int_V \rho s dV$. Entropija sustava može se mijenjati interakcijom s okolinom ili promjenama koje se događaju unutar sustava. Slijedi

$$ds = ds^{(e)} + ds^{(i)} \tag{33}$$

gdje je ds povećanje specifične entropije, $ds^{(e)}$ povećanje zbog interakcije s okolinom i $ds^{(i)}$ unutarnje povećanje. Promjena $ds^{(i)}$ nikad nije negativna. Ona iznosi nula za povratni proces a pozitivna je za nepovratni proces. Slijedi

$$ds^{(i)} > 0 \quad (nepovratni\, proces) \tag{34}$$

$$ds^{(i)} = 0 \quad (povratni\, proces) \tag{35}$$

U povratnom procesu, ako $dq_{(R)}$ označava toplinu dodanu sustavu po jedinici mase, promjena $ds^{(e)}$ dana je s

$$ds^{(e)} = \frac{dq_{(R)}}{T} \quad (povratni\, proces) \tag{36}$$

Zamjenom dq s $dQ/_m$ dolazimo do izraza

$$ds = \frac{dQ}{Tm}$$

$$mds = \frac{dQ}{T}$$

I time dolazimo do izraza za entropiju

$$dL = \frac{dQ}{T} \tag{37}$$

6.6. Clausius-Duhemova nejednakost. Funkcija rasipanja.

Clausius-Duhemova nejednakost je način izražavanja drugog zakona termodinamike korištenog u mehanici kontinuuma.

Sukladno drugom zakonu termodinamike, vremenski tok promjene ukupne entropije L u kontinuumu volumena V nikad nije manji od sume priljeva entropije kroz površinu kontinuuma i unutarnje entropije.

$$v(t) = \int_V \bar{R}\, dV - \int_S \boldsymbol{H}\, dS$$

$$\bar{R} = e\rho;\ \boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{c}}{T}$$

$\bar{R}$ predstavlja izvor entropije, a $\boldsymbol{H}$ tok entropije.

$$v(t) = \int_V e\rho\, dV - \int_S \boldsymbol{Hn}\, dS$$

$$v(t) = \int_V e\rho\ dV - \int_S \frac{\boldsymbol{cn}}{T}\, dS$$

$$v(t) = \int_V e\rho\ dV - \int_S \frac{c_i n_i}{T}\, dS$$

$v(t)$ u prethodnim izrazima nam predstavlja brzinu promjene ukupne entropije.

Matematički, ovo načelo entropije izražava se integralnim oblikom kao Clausius-Duhemova nejednakost,

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho s dV \ \geq \int_V \rho e\ dV - \int_S \frac{c_i n_i}{T}\, dS \tag{38}$$

gdje je e izvor lokalne entropije po jedinici mase. Jednakost (38) vrijedi za povratne procese, a nejednakost za nepovratne procese.

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho s dV - \int_V \rho e\ dV + \int_S \frac{\boldsymbol{c}}{T}\, dS \ \geq\ 0$$

$$\int_V \rho\frac{ds}{dt}\, dV - \int_V \rho e\ dV + \int_V div\frac{\boldsymbol{c}}{T}\, dV \ \geq 0$$

$$\int_V \left(\frac{ds}{dt} - e - \frac{1}{\rho}\left(\frac{c_i}{T}\right)_i\right)\rho dV \ \geq 0.$$

Clausius-Duhemova nejednakost vrijedi za proizvoljni volumen V tako da pretvaranjem površinskog integrala (38) pomoću Gaussovog teorema divergencije, lokalni oblik brzine stvaranja unutarnje entropije y po jedinici mase, dan je

$$y \equiv \frac{ds}{dt} - e - \frac{1}{\rho}\left(\frac{c_i}{T}\right)_{,i} \geq 0 \tag{39}$$

Ova nejednakost mora biti zadovoljena za svaki proces i za svaku dodijeljenu varijablu stanja. Iz tog razloga ona ima važnu ulogu u znatnim ograničenjima nad tzv. konstitutivnim jednadžbama o kojima će se raspraviti u dijelu koji slijedi.

U mehanici kontinuuma često se pretpostavlja (bazirano na statističkoj mehanici nepovratnih procesa) razdvajanje tenzora naprezanja u dva dijela po shemi,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(C)} + \sigma_{ij}^{(D)} \tag{40}$$

gdje je $\sigma_{ij}^{(C)}$ konzervativni tenzor naprezanja i $\sigma_{ij}^{(D)}$ disipativni tenzor naprezanja.

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}{}^{C} D_{ij} + \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}{}^{D} D_{ij} - \frac{1}{\rho}c_{i,i} + z$$

Jednadžba energije (32) može se zapisati koristeći $D_{ij} = \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{ij}}$ i izraz

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\rho}\left(c_{i,i}\right) + z$$

do kojeg dolazimo pomoću jednadžbe

$$\frac{dQ}{dt} = -\int_S c_i n_i \, dS + \int_V \rho z \, dV$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\int_V div\, c \, dV + \int_V \rho z \, dV$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\int_V c_{i,i} \, dV + \int_V \rho z \, dV$$

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V \left[-\frac{1}{\rho}\left(c_{i,i}\right) + z\right] \rho dV$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\rho}\left(c_{i,i}\right) + z$$

Što nam konačno daje

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho}\,\sigma_{ij}^{(C)}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij} + \frac{1}{\rho}\,\sigma_{ij}^{(D)}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij} + \frac{dq}{dt} \tag{41}$$

U ovoj jednadžbi $\frac{1}{\rho}\,\sigma_{ij}^{(D)}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij}$ je brzina disipacije energije naprezanjem po jedinici mase, a dq/dt je brzina dovođenja topline po jedinici mase u kontinuum. Ako kontinuum izložimo povratnom procesu, neće biti disipacije energije iz čega slijedi da je $dq/dt = dq_{(R)}/dt$ tako da kombiniranjem (41) i (36) dobijemo

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho}\,\sigma_{ij}^{(C)}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij} + T\,\frac{ds}{dt} \tag{42}$$

Dakle u nepovratnom procesu opisanom (41), brzina stvaranja entropije može se izraziti umetanjem (42). Slijedi

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{\rho T}\,\sigma_{ij}^{(D)}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij} \tag{43}$$

Skalar $\sigma_{ij}^{(D)}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij}$ zove se funkcija disipacije. Za nepovratni adijabatski proces vrijedi $dq = 0$, $ds/dt > 0$, tako da iz (43) slijedi da je funkcija disipacije pozitivno definitna s obzirom da su $\rho\ i\ T$ uvijek pozitivni.

6.7. Konstitutivne jednadžbe. Termomehanički i mehanički kontinuum.

U prethodnim dijelovima ovoga rada razvili smo nekoliko jednadžbi koje moraju vrijediti za svaki proces ili gibanje kojemu je kontinuum podvrgnut. Za termomehanički kontinuum u kojem su uparene mehaničke i toplinske pojave, vrijede osnovne jednadžbe

(a) jednadžba kontinuiteta (4)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \quad ili \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \tag{44}$$

(b) jednadžba gibanja (16)

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho\dot{v}_i \quad ili \quad \boldsymbol{\nabla}_x\cdot\boldsymbol{\Sigma} + \rho\boldsymbol{b} = \rho\dot{\boldsymbol{v}} \tag{45}$$

(c) jednadžba energije (32)

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho}\,\sigma_{ij}D_{ij} - \frac{1}{\rho}\,c_{i,i} + z \tag{46}$$

Preptostavljajući da su određene vanjske sile $\boldsymbol{b}$ i izvori topline z, (44), (45) i (46) sadrže pet nezavisnih jednadžbi uključujući četrnaest nepoznatih funkcija vremena i položaja. Nepoznanice su gustoća ρ, tri komponente brzine v_i(ili komponente pomaka u_i), šest nezavisnih komponenti σ_{ij}, tri komponente vektora toka topline c_i i specifična unutarnja energija u. Također, mora vrijediti Clausius-Duhemova nejednakost (39)

$$\frac{ds}{dt} - e - \frac{1}{\rho}\left(\frac{q_i}{T}\right)_{,i} \geq 0 \tag{47}$$

Ovo uvodi dvije dodatne nepoznanice: gustoću entropije s i apsolutnu temperaturu T. Dakle, moramo uvesti jedanaest dodatnih jednadžbi da bi sustav učinili određenim (determinantnim). Njih šest biti će u obliku znanom kao konstitutivne jednadžbe koje karakteriziraju određena fizikalna svojstva promatranog kontinuuma. Od preostalih pet, tri će biti u obliku odnosa temperature i provodljivosti topline i dvije će se pojaviti kao termodinamičke jednadžbe stanja.

Potrebno je napomenuti da je cilj konstitutivnih jednadžbi uspostaviti matematički odnos između statičkih, kinematičkih i toplinskih varijabli, koje će opisati ponašanje materije podvrgnute mehaničkim i toplinskim silama. S obzirom da realni materijali pod različitim opterećenjima reagiraju na osobito kompleksne načine, konstitutivne jednadžbe ne nastoje obuhvatiti sve pojave vezane za određeni materijal, već da definira određene idealne materijale kao što je idealno elastična krutina ili idealno viskozni fluid. Takve idealizacije modela materijala su često korisne kod prikazivanja ponašanja realnih supstanci.

7. Zaključak

Mehanika kontinuuma je grana mehanike posvećena proučavanju gibanja i ravnoteže plinova, tekućina i krutih tijela. Fizikalna svojstva su predočena pomoću tenzora. Tenzori su matematički objekti koji imaju svojstvo da su nezavisni o koordinatnom sustavu. Zbog pojednostavljenja računanja mogu se prikazati u koordinatnim sustavima.

Materija, kao što su kruta tijela i fluidi, građena je od molekula odvojenih "praznim" prostorom. Na mikroskopskoj skali, materija ima pukotine i nije kontinuirana. Međutim, određene fizikalne pojave mogu biti prikazane s pretpostavkom da materija postoji kao kontinuum, što znači da je materija u tijelu kontinuirano raspoređena i ispunjava sav prostor koji zauzima. Kontinuum je tijelo koje se kontinuirano može dijeliti na beskonačno male elemente sa svojstvima osnovne materije.

8. Literatura

1. Mase G.E., Schaum's Outline of Theory and Problems of Continuum Mechanics, New York, McGraw – Hill Book Company, 1970.
2. Malvern L.E., Introduction to the Mechanics of a continuous medium, New Jersey, Prentice – Hall, Inc., 1969.
3. https://www.fsb.unizg.hr/hydro/web_pdf/MF_I/01_Matematicke_osnove_dopuna_predavanja.pdf (06.08.2015.)
4. https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/vekt/VP-4-Unitarni-prostori.pdf (13.08.2015.)
5. https://www.fsb.unizg.hr/zbrodo/pokus/upload/others/MFI_6.pdf (14.08.2015.)
6. http://www.continuummechanics.org/cm/continuityequation.html (16.08.2015.)
7. https://www.physics.wisc.edu/grads/courses/726-f07/files/Section_3_Cont_02.pdf (16.08.2015.)
8. http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/SolidMechanicsBooks/Part_III/Chapter_3_Stress_Mass_Momentum/Stress_Balance_Principles_02_The_Momentum_Principles.pdf (17.08.2015.)
9. http://geo.mff.cuni.cz/studium/Martinec-ContinuumMechanics.pdf (27.08.2015.)
10. http://www.scribd.com/doc/165757404/Mehanika-kontinuuma#scribd (27.08.2015.)
11. http://www.britannica.com/topic/matter (29.08.2015.)
12. http://www-astro.physics.ox.ac.uk/~sr/lectures/vectors/lecture10final.pdfc (04.09.2015.)
13. https://www.fer.hr/_download/repository/06_Strujanje_fluida.pdf (06.09.2015.)
14. http://www.ptf.unze.ba/nastava/OHH/L1%20Mehanika%20tekucina.pdf (06.09.2015.)
15. http://repozitorij.fsb.hr/2245/1/28_02_2013_Andrej_Vasilj_Zavrsni_rad.pdf (07.09.2015.)
16. http://www.continuummechanics.org/cm/introduction.html (11.09.2015.)
17. http://rudar.rgn.hr/~lfrgic/nids_lfrgic/Mehanika%20kontinuuma%20i%20relogija_cijela.pdf (27.09.2015.)
18. http://www.rci.rutgers.edu/~tsakalak/CME407/Lecture11.pdf (20.10.2015.)
19. http://www.phy.pmf.unizg.hr/dodip/notes/statisticka/statisticka.pdf (11.12.2015.)
20. https://www.fsb.unizg.hr/hydro/web_pdf/MF/Skripta_0.pdf (15.12.2015.)
21. http://gradst.unist.hr/Portals/9/PropertyAgent/1167/Files/2793/pojmovi%20skalar-%20vektor-%20tenzor.pdf (15.12.2015.)

Životopis

Rođena sam 18. studenog 1987. godine u Osijeku. Osnovnu školu Vijenac pohađala sam u Osijeku. Nakon završene osnovne škole upisala sam II. Gimnaziju u Osijeku. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja, 2006. godine, upisujem Preddiplomski studij fizike na Odjelu za fiziku. Po završetku Preddiplomskog studija fizika, upisala sam diplomski Sveučilišni diplomski studij fizike i informatike.